

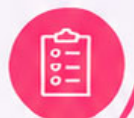
با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe



گام به گام ریاضی و آمار دهم انسانی - فصل ۲

معادلهٔ درجه دوم

فهرست

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

۵	۱	فعالیت، صفحه ۲۶ — طرح معادله از روی ترازو
۵	۲	فعالیت، صفحه ۲۶ — دو برابر یک عدد به علاوه یک و پنج برابر همان عدد منهای چهار
۶	۳	کار در کلاس، صفحه ۲۷ — معمای حواصلها
۷	۴	فعالیت، صفحه ۲۹ — عددی که مربع آن ۳ برابر خودش است
۸	۵	فعالیت، صفحه ۲۹ — مساحت شکل برابر با محیط آن
۸	۶	کار در کلاس، صفحه ۳۰ — سن نیما و کیان
۹	۷	تمرین، صفحه ۳۰ — تبدیل عبارت‌ها به معادله
۹	۸	تمرین، صفحه ۳۰ — حقوق مهندس، تکنسین و مدیر بخش
۹	۹	تمرین، صفحه ۳۰ — تولید فولاد ذوب آهن اصفهان
۱۰	۱۰	تمرین، صفحه ۳۰ — مجموع مساحت‌های سه شکل
۱۰	۱۱	بازی با حروف الفبا به کمک مدل‌سازی ریاضی (رمزنگاری)، صفحه ۳۰ — رمزنگاری با معادلهٔ ریاضی
۱۱	۱۲	تمرین، صفحه ۳۰ — قالی با ابعاد $2/80$ در $1/10$ متر

درس دوم: حل معادلهٔ درجهٔ ۲ و کاربردها

۱۲	۱۳	فعالیت، صفحه ۳۵ — تکمیل تساوی‌ها با اتحادها
۱۴	۱۴	فعالیت، صفحه ۳۶ — وصل کردن اتحاد مناسب به معادله و حل آن
۱۵	۱۵	کار در کلاس، صفحه ۳۷ — حل معادله با اتحادها

۱۵	تمرین، صفحه ۳۷ — حل معادله‌های درجه دوم
۱۷	تمرین، صفحه ۳۷ — مربع با سه شکل بریده‌شده
۱۸	تمرین، صفحه ۳۷ — معادله درجه دومی با دو ریشه مشخص
۱۸	تمرین، صفحه ۳۷ — معادله با ریشه مضاعف ۱
۱۸	تمرین، صفحه ۳۷ — تعداد ریشه‌های معادله شامل پارامتر K
۱۹	تمرین، صفحه ۳۷ — تابلوی راهنمایی «یک طرفه» و هزینه برچسب‌ها
۲۱	کار در کلاس، صفحه ۴۲ — مسابقه پله‌ها؛ حل معادله با تکمیل مربع
۲۲	تمرین، صفحه ۴۳ — حل با روش تشکیل مربع کامل
۲۳	فعالیت، صفحه ۴۴ — فرمول دلتا و ریشه‌های معادله درجه دوم
۲۳	کار در کلاس، صفحه ۴۵ — مجموع ریشه‌ها و ضرایب معادله

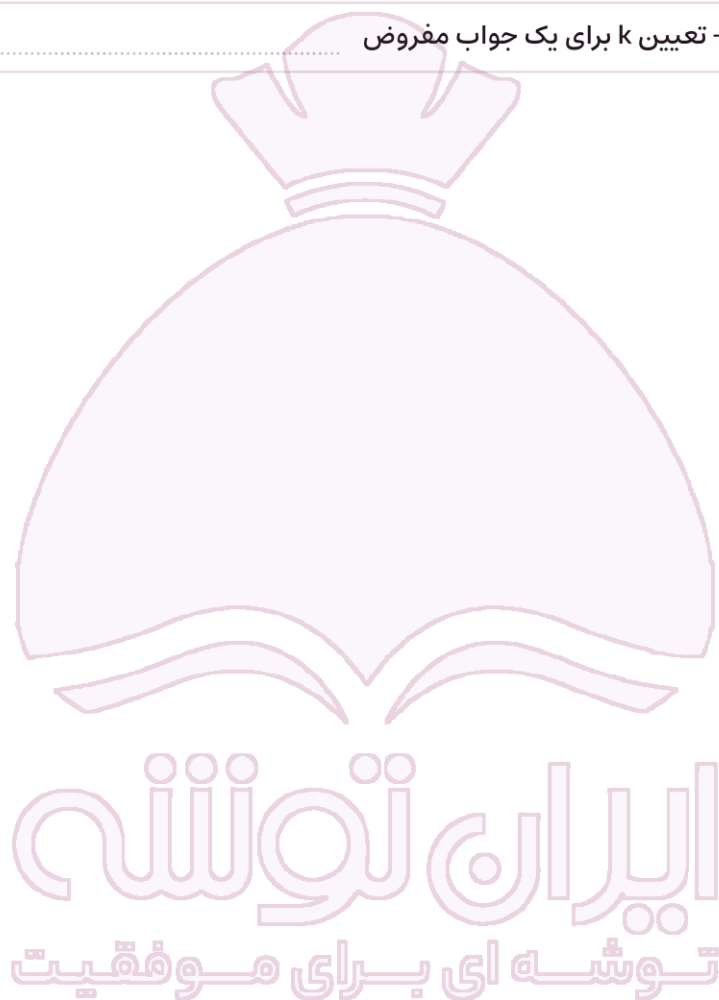
طرح و حل چند مسأله کاربردی از معادله درجه دو

۲۴	مسئله اول — تابع هزینه، درآمد و سود؛ تولید دوچرخه
۲۵	مسئله دوم — سود کارگاه تولید چتر؛ نقطه سر به سر
۲۶	تمرین، صفحه ۴۷ — حل معادله‌های درجه دوم با دلتا (۱ تا ۳)
۲۸	تمرین، صفحه ۴۷ — حاصل ضرب ریشه‌ها در یک معادله درجه دوم
۲۸	تمرین، صفحه ۴۷ — یافتن جواب دیگر معادله از روی یک جواب
۲۹	تمرین، صفحه ۴۷ — مساحت مثلث و مستطیل برابر است
۲۹	تمرین، صفحه ۴۷ — معادله‌ای که به ازای هر مقدار a جواب حقیقی دارد
۳۰	تمرین، صفحه ۴۷ — رابطه ضرایب و ریشه‌ها وقتی b برابر a به علاوه c است
۳۰	تمرین، صفحه ۴۷ — حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم
۳۰	تمرین، صفحه ۴۷ — رابطه ضرایب و ریشه‌ها وقتی مجموع ضرایب صفر است

درس سوم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

۳۱	فعالیت، صفحه ۴۸ — زمان رسیدن علی به مدرسه
۳۲	مثال — معادله با ریشه غیرقابل قبول

۳۲		مثال — معادله گویا با دو ریشه	۳۸
۳۳		مثال — تعیین پارامتر a برای یک جواب مفروض	۳۹
۳۳		کار در کلاس، صفحه ۵۰ — حل معادله های گویا (الف تا ث)	۴۰
۳۴		تمرین، صفحه ۵۲ — حل معادله های گویا (۱: الف تا ج)	۴۱
۳۶		تمرین، صفحه ۵۲ — مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی	۴۲
۳۶		تمرین، صفحه ۵۲ — دو چاپگر و فیش حقوق کارگران	۴۳
۳۷		تمرین، صفحه ۵۲ — تعیین k برای یک جواب مفروض	۴۴



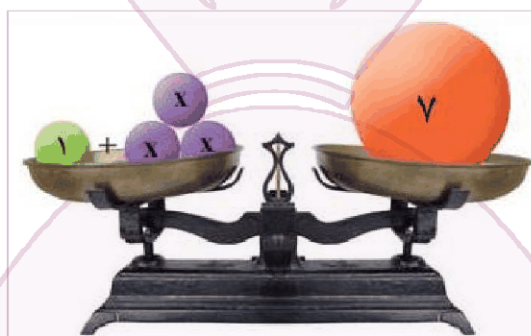
درس اول: معادله و مسائل توصیفی

فعالیت

صفحه ۲۶

۱

با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



عددی را بیابید که سه برابر آن به علاوه‌ی عدد یک، برابر با هفت باشد؟

$$3x + 1 = 7 \Rightarrow 3x = 7 - 1$$

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

فعالیت

صفحه ۲۶

۲

عددی بیابید که دو برابر آن به علاوه‌ی عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب: عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:

دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل $2x + 1$ و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار معادل $5x - 4$ است که باید با یکدیگر برابر باشند یعنی:

$$2x + 1 = 5x - 4$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{5}{3}$$

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است را یک معادله درجه اول می‌نامند. جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (چرا؟)

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

اگر در معادله به جای x ، $-\frac{b}{a}$ را قرار دهیم حاصل تساوی صفر می‌شود.

کار در کلاس

صفحه ۲۷

۳

یک حواصیل خاکستری دسته‌ای از حواصیل‌های سفید را در جنگل حرا در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می‌دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد:

«ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم.»

لطفاً به پرنده کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را x فرض کنیم:

ما + ما + نصف ما + نصف ما + ۱ = ۱۰۰

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$$

$$2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 99 \Rightarrow \frac{11}{4}x = 99 \Rightarrow x = \frac{4 \times 99}{11} = 36$$

آیا معادله به دست آمده از درجه اول است؟ چرا؟

بله، چون بزرگترین درجه x از درجه یک می‌باشد.

ضرایب a و b کدام‌اند؟

$$11x - 99(\times 4) = 0 \Rightarrow 11x - 396 = 0 \Rightarrow a = 11, b = 396$$

فعالیت

صفحه ۲۹

۴

۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

اگر عدد مورد نظر x فرض شود، مربع همان عدد برابر x^2 و سه برابر همان عدد برابر $3x$ است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی:

$$x^2 = 3x$$

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟

بله می‌توانیم حدس بزنیم. بله دو جواب دارد: ۰ و ۳

از میان مقادیر زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟

$x = 3$	$x = 4$	$x = -3$	$x = 1$	$x = 0$
x	x	x	x	✓

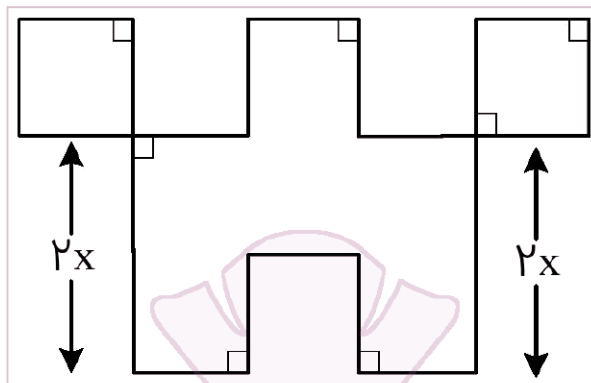
به جز روش حدس برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$x^2 = 3x \text{ یا } x = 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0, \quad x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن $a \neq 0$ ، ضریب x^2 ، b ضریب x و c عدد ثابت است.

ایران نوین
توشه‌ای برای موفقیت

۲. در شکل زیر طول تمام پاره خط‌ها به جز دو پاره خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد. مقدار x را به دست آورید.



اندازه مساحت شکل = اندازه محیط شکل

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 2x^2 + 2x^2 + 2x^2 &= 4x + 4x + 14x \Rightarrow \\ 8x^2 = 22x &\Rightarrow 4x^2 = 11x \Rightarrow 4x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x(4x - 11) = 0 \\ 4x - 11 = 0 &\Rightarrow x = \frac{11}{4} \quad \text{غ ق } x = 0 \end{aligned}$$

نیما از پسر عمویش کیان، سه سال بزرگتر است. اگر حاصل ضرب سن‌های این دو ۴۰ باشد، پسر عموی کوچکتر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر است. بنابراین: سن کیان $x - 3$

$$x \times (x - 3) = 40 \Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 5) = 0$$

توشه‌ای برای موفقیت
غ ق $x = -5$ سن نیما $x = 8$

آیا می‌توانید جواب‌های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟

بله، می‌شود حدس زد البته کمی شاید حدس زدن مشکل به نظر برسد ۸ و ۵ دو عدد هستند که حاصل ضربشان ۴۰ و یکی از دیگری ۳ واحد بزرگتر است، این معادله از درجه ۲ می‌باشد.

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می‌کند؟ آیا این جواب در این سوال معنی دارد؟

دو جواب دارد- بله صدق می‌کند- خیر معنی ندارد زیرا سن نمی‌تواند یک عدد منفی باشد.

۱. هر کدام از عبارتهای زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.

$$5x + 2 = 3x - 2$$

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه یک است.

$$x^2 = x + 1$$

۲. در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن‌ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵,۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

حقوق مهندس $x =$ ، حقوق تکنسین $y =$ ، حقوق مدیر $z =$

$$x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \quad x = \frac{2}{3}z \Rightarrow z = \frac{3}{2}x \quad 3z + 8x + 12y = 55.5 \Rightarrow$$

$$3 \times \left(\frac{3}{2}x\right) + 8x + 12\left(\frac{x}{2}\right) = 55.5 \Rightarrow \frac{9x + 28x}{2} = 55.5 \Rightarrow 37x = 111 \Rightarrow$$

$$x = \frac{111}{37} = 3 \Rightarrow y = 1.5$$

حقوق تکنسین ۱/۵ میلیون تومان است.

۳. با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	
x	$+ 2x$	$+ 4x$	$+ 8x$	$+ 16x$	$= 31x$

$$16x = 64 \Rightarrow x = 4$$

$$4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$$

۱۲۴ هزار تن مجموع تولید فولاد در این پنج روز بوده است.

اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

$$60 = 64 - 4 \text{ هزار تن}$$

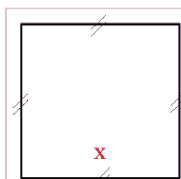
۶۰ هزار تن اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه بوده است.

تمرین

صفحه ۳۰

۱۰

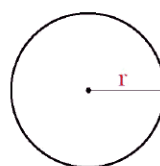
۴. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

$$x^2 + \frac{x^2}{4} + \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \right)^2 = 7 \Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 7 \Rightarrow$$

$$7x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x = -2 \text{ غ ق ق } x = 2 \text{ طول ضلع مربع}$$

بازی با حروف الفبا به کمک مدل‌سازی ریاضی (رمزنگاری)

صفحه ۳۰

۱۱

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می‌شود. حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص شده‌اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود. زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $4x^2$ مشخص می‌شود زیرا چهارمین حرف الفبا است ($a = 4$) و دارای دو نقطه است ($n = 2$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می‌کنیم. مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

ه	چ	ن	غ
۳۱	$7x^3$	$29x$	$22x$

$$\text{غنچه} \leftarrow \text{معادل ریاضی} \leftarrow 22x + 29x + 7x^3 + 31$$

$$x \times x = 4900 \Rightarrow x \pm 70 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -70 \\ x = 70 \end{cases}$$

این قالی ۷۰ رج است.

ب) اگر برای هر گره ۱cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟

$$m = 58/800 \text{ cm} = 5880000 \text{ cm} = 5880000 \times 1 \text{ شده}$$

پ) یک قالی باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی ببافد. اگر این قالی باف ۵ روز در هفته کار کند برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

$$\text{تعداد روزهایی که بافتن قالی طول می‌کشد} = \frac{5880000}{6000} = 980 \text{ روز}$$

$$\text{تعداد هفته‌ها} = \frac{980}{5} = 196$$

ت) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و ششصد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$$\text{هزینه‌ها} - \text{قیمت فروش قالی} = \text{سود حاصل از بافتن قالی} = 29400000 - 5600000 = 23800000$$

$$\text{دستمزد هر هفته} = \frac{23800000}{196} = 121428 \text{ تومان}$$

$$\text{دستمزد بافنده به ازای هر روز} = \frac{121428}{5} = 24285 \text{ تومان}$$

درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

توشه‌ای برای موفقیت

فعالیت

صفحه ۳۵

۱۳

طرف دوم تساوی‌های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده (مربع دو جمله‌ای، مزدوج و جمله مشترک) کامل کنید:

(الف)

$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$

(ب)

$$(2 + 3xy)^2 = 4 + 12xy + 9x^2y^2$$

(پ)

$$(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$$

(ت)

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2)$$

(ث)

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{4} - 3x$$



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل نمایید.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
اتحاد مربع تفاضل دو جمله	$x^2 + 6x = 0$	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0$ $\Rightarrow x = 0$ یا $x = -6$ پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
عامل یابی (فاکتورگیری)	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x + 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = -3$
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 16 = 0$	روش ۱: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 4) = 0$ $\Rightarrow x = 4$ یا $x = -4$ روش ۲: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
اتحاد مربع مجموع دو جمله	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$(x + 3)(x + 2) = 0$ $\Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
اتحاد مزدوج و روش ریشه گیری	$x^2 - 10x + 25 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow$ $(x - 5)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x - 5)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5 \quad \text{OR} \quad x = 5$

۱. با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

الف) اگر $c = 0$ از کدام روش بالا استفاده می کنید؟

روش فاکتورگیری (تجزیه)

ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می کنید؟

هرگاه سه جمله داشته باشیم که دو جمله آن مربع کامل باشند و حاصل دو برابر یکی از دو جمله در دیگری نیز وجود داشته باشد.

پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه گیری، b در چه شرطی صدق می کند؟ آیا

علامت‌های a و c مهم است؟

ضریب b باید صفر باشد a و c مختلف علامه باشند.

ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله ریشه مضاعف محسوب می شود؟

اتحادهای مربع مجموع یا تفاضل دو جمله

$$x^2 + 6x + 9 = 0, \quad x^2 - 10x + 25 = 0$$

در یک معادله درجه ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند اصطلاحاً می گوییم، معادله ریشه مضاعف است.

۲. آیا می توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 + x + 3 = 0$$

کار در کلاس

صفحه ۳۷

۱۵

با استفاده از اتحادهای بالا معادلات زیر را حل کنید:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (1)$$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید.

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x = -4 \text{ OR } (x + 4) = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ یا } (x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$4x^2 - (2 - x)^2 = 0 \quad (2)$$

با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ تساوی را تجزیه می کنیم:

$$(2x - (2 - x))(2x + (2 - x)) = 0 \Rightarrow (2x - 2 + x)(2x + 2 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$(3x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

تمرین

صفحه ۳۷

۱۶

معادله های زیر را حل کنید.

$$2x^2 - 8 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 2(x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

ب) $(x + 2)(x - 3) = x - 3$

$$(x + 2)(x - 3) = x - 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پ) $x^4 - 2x^2 = 0$

$$x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

* اگر عبارتی با توان ۲ برابر صفر باشد، خود آن عبارت را می‌توان مساوی صفر قرار داد.

ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2 = 4x - 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

$$(2x - 1)(2x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ث) $2x^2 - 8x = 0$

$$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{OR} \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

چ) $\frac{x^2}{3} = x$

$$\frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{OR} \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

ج) $x^2 = 5 - x^2$

$$x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (3x + 2)(3x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ز) $(x - 3)^2 = 4$

$$(x - 3)^2 = 4 \Rightarrow (x - 3) = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 2 + 3 \Rightarrow$$

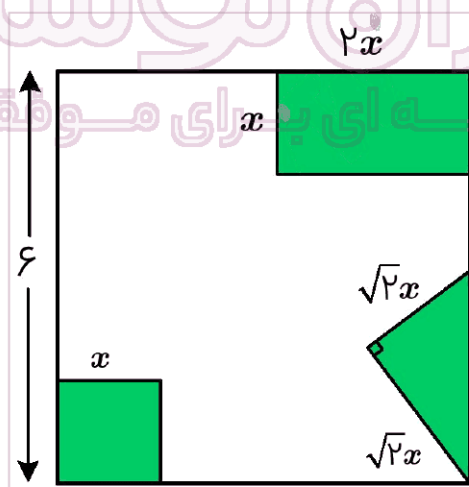
$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

تمرین

صفحه ۳۷

۱۷

۲. از مربعی به ضلع 6cm سه شکل روبه رو بریده شده است. مساحت باقی مانده 24cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟



(مساحت قسمت‌های هاشور خورده - مساحت کل مربع = مساحت ناحیه سفید)

(مساحت مستطیل + مساحت مربع + مساحت مثلث قائم الزاویه) - مساحت کل مربع =

$$24 = 6^2 - (x \times 2x + x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{2}x \times \sqrt{2}x)$$

(در عبارت داخل پرانتز، به ترتیب: مساحت مستطیل، مساحت مربع، مساحت مثلث)

$$24 = 36 - (2x^2 + x^2 + x^2) \Rightarrow 24 = 36 - 4x^2 \\ \Rightarrow 4x^2 = 36 - 24 \Rightarrow 4x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = +\sqrt{3}$$

تمرین

صفحه ۳۷

۱۸

۳. معادله درجه دومی بنویسید که $x = 2$ ، $x = -3$ جواب‌های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$$

$$x = -3 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

خیر، منحصر به فرد نیست، مثلاً:

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

تمرین

صفحه ۳۷

۱۹

۴. معادله درجه دومی بنویسید که $x = 1$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$$x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0, (2x - 2)^2 = 0$$

خیر منحصر به فرد نیست، مثلاً:

تمرین

صفحه ۳۷

۲۰

۵. در معادله $(x - 1)^2 = K$:

(الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K = 2$ ، $K = 4$ ، $K = 0$ و $k = -9$ به دست آورید.

$$K = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

(ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه مضاعف دارد؟

(پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه حقیقی دارد؟

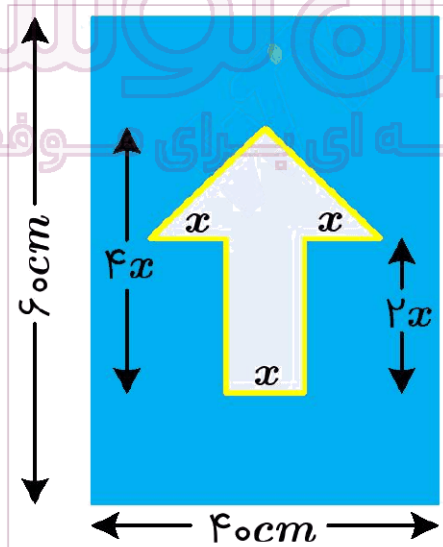
(ت) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟

تمرین

صفحه ۳۷

21

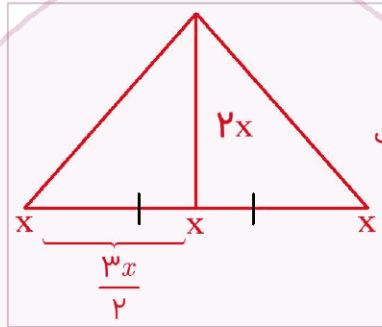
۶. برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» بر روی یک پل، مطابق شکل زیر از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه $1cm^2$ برچسب سفید ۳۰ تومان و هزینه $1cm^2$ برچسب آبی ۱۰ تومان است. مجموع هزینه برچسب‌های سفید و آبی ۲۷۰۰۰ تومان شده است.



الف) اندازه x چقدر است؟

$$\begin{aligned}
 \text{مساحت قسمت سفید} &= \text{مساحت مستطیل} + \text{مساحت مثلث} = (2x \times x) + \frac{1}{2}(3x)(2x) \\
 &= 2x^2 + 3x^2 = 5x^2 \text{ مساحت قسمت سفید} \\
 \text{مساحت قسمت آبی} &= \text{مساحت کل} - \text{مساحت قسمت سفید} = 2400 - 5x^2 \\
 \text{هزینه برچسب سفید} &= 150x^2 = 5x^2 \times 30 \\
 \text{هزینه برچسب آبی} &= (2400 - 5x^2) \times 10 = 24000 - 50x^2 \\
 \text{هزینه کل} &= 150x^2 + 24000 - 50x^2 = 27000 \Rightarrow 100x^2 = 3000 \\
 &\Rightarrow x^2 = \frac{3000}{100} = 30 \Rightarrow x = \sqrt{30} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل رو به رو از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه 1 cm آن 100 تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلو 34800 تومان می‌شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟



$$\begin{aligned}
 \text{وتر}^2 &= \text{فیثاغورث} \Rightarrow \frac{25x^2}{4} = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (2x)^2 = \frac{9}{4}x^2 + 4x^2 = \frac{25x^2}{4} \\
 \text{طول برچسب زرد} &= x + 2x + x + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x + x + 2x = 12x \\
 \text{هزینه برچسب زرد} &= 12x \times 100 = 1200x \\
 \text{هزینه رنگ آمیزی تابلو} &= \text{هزینه برچسب آبی} + \text{هزینه برچسب سفید} + \text{هزینه برچسب زرد} = 34800 \\
 (24000 - 50x^2) + (150x^2) + 12x \times 100 &= 34800 \\
 100x^2 + 1200x - 10800 &= 0 \Rightarrow (\div 100) \quad x^2 + 12x - 108 = 0 \\
 (x + 18)(x - 6) &= 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + 18 = 0 \rightarrow x = -18 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$$

با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

$$۲x^۲ - ۶x - ۱ = ۰ \quad (۱)$$

تمرین قبل از مسابقه

$۲x^۲ - ۶x = ۱$
 $x^۲ - ۳x = \frac{۱}{۲}$
 $x^۲ - ۳x + \frac{۹}{۴} = \frac{۱}{۲} + \frac{۹}{۴}$
 $(x - \frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۱۱}{۴}$
 $x - \frac{۳}{۲} = \pm \frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$
 $\begin{cases} x - \frac{۳}{۲} = + \frac{\sqrt{۱۱}}{۲} \\ x - \frac{۳}{۲} = - \frac{\sqrt{۱۱}}{۲} \end{cases}$

$$۳x^۲ - ۲ = ۶x \quad (۲)$$

مسابقه

$۳x^۲ - ۶x = ۲$
 $x^۲ - ۲x = \frac{۲}{۳}$
 $x^۲ - ۲x + ۱ = \frac{۲}{۳} + ۱$
 $(x - ۱)^۲ = \frac{۵}{۳}$
 $x - ۱ = \pm \sqrt{\frac{۵}{۳}}$
 $\begin{cases} x = \frac{۳ + \sqrt{۱۵}}{۳} \\ x = \frac{۳ - \sqrt{۱۵}}{۳} \end{cases}$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



معادلات درجه دو زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = -6$

$$x^2 - 5x = -6 \Rightarrow x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\ x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

ب) $9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 3x = 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9}$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{36}\right)$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36} \Rightarrow$$

$$x + \frac{1}{6} = \pm \frac{\sqrt{5}}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{6} \\ x = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{6} \end{cases}$$

پ) $x^2 + \frac{1}{4} = -x \Rightarrow x^2 + x = -\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ریشه مضاعف

ت) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$(x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

ریشه مضاعف

۱. جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $b = -3$ ، $c = 2$ و $a = 1$ است. بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

پس معادله دارای دو جواب است $\Delta > 0$

$$x = 1 \text{ یا } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2$$

۲. جواب‌های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن: $a = 4$ ، $b = 7$ ، $c = -2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} =$$

$$\begin{cases} \frac{-7 + 9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \frac{-7 - 9}{8} = \frac{-16}{8} = -2 \end{cases}$$

۳. جواب‌های معادله $3x^2 + x + 7 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن: $a = 3$ ، $b = 1$ ، $c = 7$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(3)(7) = 1 - 84 = -83$$

$\Delta < 0$ بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

نوشته ای برای موفقیت

معادله‌های زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a ، b و c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

$$\text{الف) } 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(3)(-2) \Rightarrow \Delta = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2(3)} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$(b) \quad 4x^2 + 3x - 7 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(4)(-7) \Rightarrow \Delta = 9 + 112 = 121 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 11}{8} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{5}{4}$$

بله، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ می‌باشد.

طرح و حل چند مسأله کاربردی از معادله درجه دو

مسئله اول

۲۶

مقدمه: در هر مسأله اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می‌شوند:

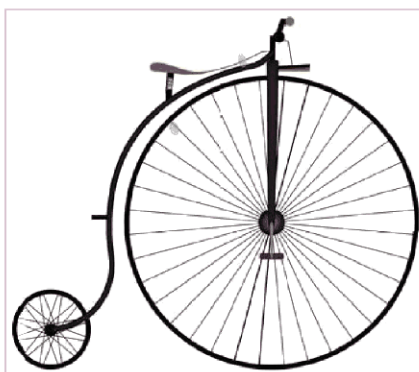
تابع هزینه: $C(x)$ یا (cost) هزینه تولید x واحد کالا

تابع سود: $P(x)$ یا (profit) سود حاصل از فروش x واحد کالا

تابع درآمد: $R(x)$ یا (Revenue) درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$$\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x) \quad \text{سود} = \text{درآمد (فروش)} - \text{هزینه}$$



فرض کنید شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده‌اید و پس از آزمایش‌ها و تأییدهای اولیه می‌خواهید اقدام به تولید انبوه این دوچرخه کنید.

هزینه‌های شما شامل ۲ بخش هستند:

۱- هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه‌های کارخانه و تبلیغات.

۲- هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.

اگر ۷ قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه $۷۰/۰۰۰ - ۲۰۰۷$ به دست آید:

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می‌شود؟

حل:

$$\begin{aligned} \text{درآمد } R(x) &= \text{قیمت هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه} = x(70000 - 200x) \\ \text{هزینه } C(x) &= \text{هزینه اولیه} + \text{هزینه تولید هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه} \\ &= 7000000 + 110(70000 - 200x) \\ &= 7000000 + 7700000 - 22000x \\ \text{سود } P(x) &= \text{درآمد} - \text{هزینه} = R(x) - C(x) \\ &= 70000x - 200x^2 - (14700000 - 22000x) \\ &= 70000x - 200x^2 - 14700000 + 22000x \\ &= -200x^2 + 92000x - 14700000 \end{aligned}$$

مسئله دوم

۲۷

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطه به دست می‌آید.



الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد چقدر از دست می‌دهد؟

$$\text{چتر نفروشد} \rightarrow x = 0 \rightarrow P(0) = -100$$

ب) نقطه سر به سر (break-even) میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی را نشان می‌دهد که در آن میزان هزینه‌ها با میزان درآمدها برابر می‌شود و بنگاه در این سطح از تولید نه سود می‌کند و نه ضرر. اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر باشد بنگاه سود خواهد برد و اگر کمتر باشد، زیان خواهد دید. در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می‌رسد؟ چندمین تولید چتر برای کارگاه سودآور است؟

$$\rightarrow P(x) = 0 \rightarrow -0.00405x^2 + 8/15x - 100 = 0 \text{ نه سود و نه ضرر}$$

$$\Delta = (8/15)^2 - 4(-0.00405)(-100) = 8/0.5$$

$$x = \frac{-8/15 \pm \sqrt{8/0.5}}{2(-0.00405)} =$$

$$\begin{cases} 2000 \\ 12/3 \end{cases}$$

۱۲/۳ قابل قبول نیست، زیرا تعداد چتر باید یک عدد طبیعی باشد.

تمرین

صفحه ۴۷

۲۸

۱. معادله‌های درجه دوم زیر را حل کنید.

$$x^2 - x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$a = 1 \quad b = -1 \quad c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(5) = 1 - 20 = 19 < 0 \quad \Delta < 0$$

چون Δ منفی است معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad (2)$$

$$a = 2 \quad b = 1 \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} =$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-1 - 3}{4} = -1 \end{cases}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (3)$$

$$a = 4 \quad b = -4 \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

معادله ریشه مضاعف دارد.

$$x^2 + 17x - 18 = 0 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad b = 17 \quad c = -18$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (17)^2 - 4(1)(-18) = 289 + 72 = 361 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 \pm \sqrt{361}}{2(1)} = \frac{-17 \pm 19}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-17 + 19}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-17 - 19}{2} = \frac{-36}{2} = -18 \end{cases}$$

$$3x^2 - x + 4 = 0 \quad (5)$$

$$a = 3 \quad b = -1 \quad c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(3)(4) = -47 < 0$$

چون Δ منفی است معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (6)$$

$$a = 1 \quad b = \sqrt{3} \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4(1)(-1) = 3 + 4 = 7$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2(1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} \\ x_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲. معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را به دست آورید.

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = -5 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

چون یک جواب معادله -4 است، پس می‌توانیم عدد -4 را به جای x جایگزین کنیم.

$$x = -4 \Rightarrow 2(-4)^2 - (-4)a + 28 = 0 \Rightarrow 32 + 4a + 28 = 0 \Rightarrow 4a = -28 - 32$$

$$4a = -60 \Rightarrow a = -\frac{60}{4} = -15$$

پس معادله به صورت $2x^2 - (-15)x + 28 = 0$ تبدیل می‌شود:

$$2x^2 - (-15)x + 28 = 0 \Rightarrow$$

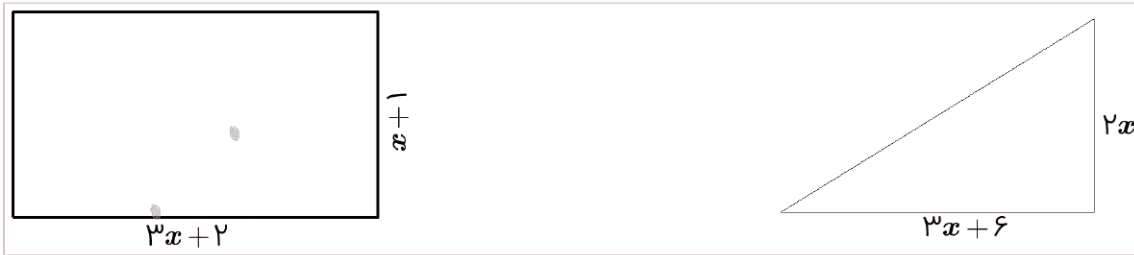
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 15 \\ c = 28 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (15)^2 - 4(2)(28) = 225 - 224 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-15 \pm 1}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-15 + 1}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2} \\ \frac{-15 - 1}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

۴. در زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم شده مساوی هستند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



$$(x+1)(3x+2) = \frac{(3x+6)(2x)}{2} \Rightarrow 3x^2 + 2x + 3x + 2 = 3x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow 5x + 2 = 6x \Rightarrow x = 2$$

$$x+1 = 2+1 = 3 \text{ عرض مستطیل}$$

$$3x+2 = 3(2)+2 = 8 \text{ طول مستطیل}$$

۵. کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^2 + ax - 1 = 0$

$$a = 1 \quad b = a \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(1)(-1) \Rightarrow a^2 + 4 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

بنابراین همواره دارای جواب‌های حقیقی است.

ب) $x^2 - x + a = 0$

$$a = 1 \quad b = -1 \quad c = a$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(a) \Rightarrow 1 - 4a$$

$$1 - 4a \geq 0 \Rightarrow -4a \geq -1 \Rightarrow 4a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4}$$

بستگی به مقدار a دارد اگر $a \leq \frac{1}{4}$ انتخاب شود جواب حقیقی وجود دارد در غیر این صورت جواب حقیقی

ندارد.

۶. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $b = a + c$ باشد. یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -\frac{c}{a}$ و دیگری $x = -1$ است.

$$ax^2 + (a + c)x + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a+c) \pm (a-c)}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-a - c + a - c}{2a} = -\frac{c}{a} \quad x_2 = \frac{-a - c - a + c}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1$$

۷. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

۸. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a + b + c = 0$) یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

$$a + b + c = 0 \Rightarrow b = -a - c \quad ax^2 + (-a - c)x + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-a - c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a - c) \pm \sqrt{(a - c)^2}}{2a} = \frac{a + c \pm (a - c)}{2a}$$

$$x_1 = \frac{a + c + a - c}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1 \quad x_2 = \frac{a + c - a + c}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

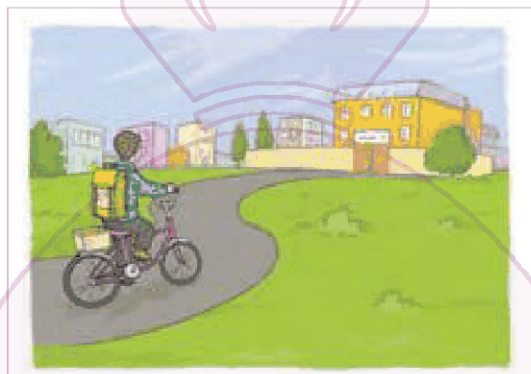
درس سوم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

فعالیت

صفحه ۴۸

۳۶

علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود، او از درب منزل تا سر خیابان اصلی ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد را محاسبه کنیم.



۱. دستور محاسبهٔ سرعت متوسط $v = \frac{x}{t}$ است که در آن v سرعت متوسط، x مسافت طی شده و t مدت زمان طی مسیر می‌باشد. داده‌های مسأله را در این دستور جایگزین کنید.

۲. برابری $15 = \frac{2/5}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا است. از آنجا که $t \neq 0$ ، پس معادله با معناست، برای حل این معادله، دو طرف را با ۱۵- جمع کنید.

۳. با مخرج مشترک گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

۴. کسری که مخرج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین صورت کسر بالا را برابر با صفر قرار دهید.

۵. از این جا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می‌آید، آن را حل کنید و مقدار t را محاسبه نمایید.

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

$$15t = 2/5 \quad \text{زمان بر حسب ساعت} \quad t = \frac{2/5}{15} = \frac{1}{6}$$

$$\text{زمان بر حسب دقیقه } t = \frac{1}{6} \times 60 = 10 \quad \text{زمان حل } 10 + 4 = 14 = \text{دقیقه}$$

مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه ۱۴ دقیقه می باشد.

برای حل معادله های شامل عبارت های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت های معادله و مخرج مشترک گیری، معادله ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می آید. با این شرط که $Q(x) \neq 0$ ، وقتی $P(x) = 0$ ، معادله جواب دارد که سپس ریشه های این معادله را به دست می آوریم. از بین ریشه های به دست آمده، آنهایی را قبول می کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟)

مثال

۳۷

مثال: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{(x-3)} = 0 \Rightarrow \frac{10 - 5x + 5 - 2x + 6}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{21 - 7x}{x-3} = 0$$

مشاهده می کنیم که به معادله ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ رسیدیم، بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه های معادله را در صورت وجود پیدا می کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x = 3$ مخرج کسرها را صفر می کند، بنابراین، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

البرار بنو زینب
توشه ای برای موفقیت

مثال

۳۸

مثال: معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} &= \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{(x-5)(x+4)} + \frac{(x-1)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 8 + x^2 - 6x + 5 - x^2 + 6x - 5}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$x = -4$ غیر قابل قبول است.

مثال

۳۹

مثال: به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است.

حل: $x=1$ را در معادله قرار می‌دهیم و سپس مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1)}{(a+1)} - \frac{2}{a+1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + a - 2}{a+1} = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

چون $a=1$ یا $a=-2$ مخرج کسره‌های معادله $\frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0$ را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل قبول‌اند.

کار در کلاس

صفحه ۵۰

۴۰

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $1 + \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x}$

$$\frac{1(x^2)}{x^2} + \frac{8}{x^2} - \frac{4(x)}{x(x)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 8 - 4x}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$a=1, \quad b=-4, \quad c=8 \quad \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(8) = 16 - 32 = -16 < 0$$

ب) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

$$\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6 - x^2 + 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{4x - 2}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پ) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

$$\begin{aligned} \frac{24}{10+m} + 1 - \frac{24}{10-m} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{24(10-m)}{(10+m)(10-m)} + \frac{(10+m)(10-m)}{(10+m)(10-m)} - \frac{24(10+m)}{(10-m)(10+m)} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{240 - 24m + 100 - m^2 - 240 - 24m}{(10+m)(10-m)} &= 0 \Rightarrow \frac{-m^2 - 48m + 100}{(10+m)(10-m)} = 0 \\ \Rightarrow -m^2 - 48m + 100 &= 0 \Rightarrow m^2 + 48m - 100 = 0 \\ (m + 50)(m - 2) &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m + 50 = 0 \Rightarrow m = -50 \\ m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} &= 1 - \frac{y-1}{3-y} \\ \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} - \frac{y-1}{y-3} - 1 &= 0 \\ \frac{(y+2)(y-3)}{(y+3)(y-3)} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} - \frac{(y-1)(y+3)}{(y-3)(y+3)} - \frac{(y+3)(y-3)}{(y+3)(y-3)} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{y^2 - y - 6 - y^2 - y^2 - 2y + 3 - y^2 + 9}{(y+3)(y-3)} &= 0 \Rightarrow \frac{-2y^2 - 3y + 6}{(y+3)(y-3)} = 0 \Rightarrow \\ -2y^2 - 3y + 6 &= 0 \Rightarrow 2y^2 + 3y - 6 = 0 \quad a=2, \quad b=3, \quad c=-6 \\ \Delta = b^2 - 4ac &= (3)^2 - 4(2)(-6) = 9 + 48 = 57 \quad y = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4} \Rightarrow \\ y_1 &= \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}, \quad y_2 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4} \end{aligned}$$

ث) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است.

$$\begin{aligned} \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} &= \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2 \times 2}{2(a-2)} + \frac{(a-2)(a-2)}{2(a-2)} - \frac{a(a-2)}{2(a-2)} \\ &= 0 \\ \Rightarrow \frac{4}{2(a-2)} + \frac{a^2 - 4a + 4}{2(a-2)} - \frac{a^2 - 2a}{2(a-2)} &= 0 \Rightarrow \frac{4 + a^2 - 4a + 4 - a^2 + 2a}{2(a-2)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{-2a + 8}{2(a-2)} &= 0 \Rightarrow -2a + 8 = 0 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

تمرین

صفحه ۵۲

۴۱

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$\frac{3x-5}{x+3} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3x-5}{x+3} - \frac{x+3}{x+3} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3x-5-x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{2x-8}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x-8=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$$

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{(3x-2)(x+3)}{x(x+3)} + \frac{(2x+5)x}{x(x+3)} - \frac{5x(x+3)}{x(x+3)} = 0$$

$$\frac{3x^2+7x-6+2x^2+5x-5x^2-15x}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow -3x-6=0 \Rightarrow -3x=6 \Rightarrow x=-2$$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3 \quad (\text{پ})$$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} - (x+3) = 0$$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} - \frac{(x+3)(x+2)}{x+2} = 0 \Rightarrow \frac{2+x-x^2-5x-6}{x+2} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4x-4}{x+2} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2-4x-4=0 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \quad (\text{ت})$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} - \frac{x-1}{x-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x(x-2)} - \frac{(1+x)(x-2)}{x(x-2)} - \frac{(x-1)x}{(x-2)x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x+2-x^2+x+2-x^2+x}{x(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4-x^2}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2} \quad (\text{ث})$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} - \frac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+3)(x-2)} - \frac{2(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-1)(x-2)} - \frac{4(x-1)(x+3)}{(x-2)(x-1)(x+3)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3x^2+3x-18-2x^2+6x-4-4x^2-8x-12}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3x^2+x-10}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0 \Rightarrow -3x^2+x-10=0$$

$$3x^2-x+10=0 \quad a=3, \quad b=-1, \quad c=10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3)(10) = 1 - 120 = -119 \quad \Delta < 0$$

معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$\frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{2 - x} = \frac{2x - 3}{x + 2} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{aligned} \frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x-3}{x+2} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} &= 0 \Rightarrow \frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 7x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0 \\ \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} &= 0 \Rightarrow -3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad a = -3, \quad b = 2, \quad c = -1 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta < 0$$

معادله ریشه حقیقی ندارد.

تمرین

صفحه ۵۲

۴۲

۲. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است، آن دو عدد را پیدا کنید.

$$x, \quad x+2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{2x+2}{x^2+2x} = \frac{5}{12} \Rightarrow 5x^2 + 10x = 24x + 24$$

$$5x^2 - 14x - 24 = 0$$

$$5A = (5x)^2 - 14(5x) - 120$$

$$5A(5x - 20)(5x + 6)$$

$$5A = 5(x - 4)(5x + 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x + 2 = 6 \\ 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

تمرین

صفحه ۵۲

۴۳

۳. هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتر نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند.

مدت زمانی که طول می‌کشد تا چاپگر قدیمی به تنهایی صفحات را چاپ کند x ساعت.

مدت زمان لازم برای چاپ صفحات با چاپگر جدید = $x - 3$ ساعت

مقدار صفحات چاپ شده توسط چاپگر قدیمی و جدید از کل صفحات در مدت ۱ ساعت = $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4x - 12 + 4x - x^2 + 3x}{4(x)(x-3)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 11x - 12 = 0$$

$$x^2 - 11x + 12 = 0 \quad \Delta = 121 - 48 = 73 \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{2} \approx \frac{11 + 8.54}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 9/73 \text{ hour} \\ x_2 = 1/28 \text{ hour} \end{cases}$$

تمرین

صفحه ۵۲

۴۴

۴. به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است.

$$\begin{aligned} \frac{4-t}{2-2t} &= \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68} \Rightarrow \frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-68} \Rightarrow \\ \frac{7}{8} &= \frac{27+k}{100-68} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27+k}{32} \Rightarrow 7 = \frac{27+k}{4} \Rightarrow 28 = 27+k \Rightarrow k = 1 \end{aligned}$$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت